



УДК 551.46(262.81)

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАРАКТЕР ИЗМЕНЕНИЯ УРОВНЯ КАСПИЙСКОГО МОРЯ И ЕГО КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ

DETERMINISTIC CHARACTER OF CHANGES OF THE CASPIAN SEA LEVEL AND ITS QUANTITATIVE PARAMETERS

У.Г. Магомедбеков
U.G. Magomedbekov

Дагестанский государственный университет,
ул. М. Гаджиева, 43а, Махачкала, Республика Дагестан 367002 Россия
Dagestan State University,
M. Gadzhiev str., 43a, Makhachkala, Republic of Dagestan 367002 Russia

Резюме. Приведены результаты по определению параметров динамики процесса изменения уровня Каспийского моря. На основе анализа временного ряда по изменению уровня водоема за 1931–2009 годы определены величины размерностей фазового пространства и аттрактора, вычислены показатели Ляпунова и оценена величина энтропии Колмогорова – Синяя. Сделано заключение о детерминированном характере протекающих процессов и проявлении динамического хаоса.

Abstract. The results of determination of parameters of dynamics of Caspian Sea level changes were studied. We determined quantities and dimensions of the phase space and the attractor, we calculated exponents of Lyapunov and assessed value of Kolmogorov – Sinai entropy based on analysis of time series by the change in the reservoir for 1931–2009.

Introduction. When interpreting the data on oscillatory phenomena an application of the theory of self-organization approaches becomes interesting, as it allows to set in a certain extent the behavior and evolution of the system regardless the nature of occurring in them processes.

Methods. During the preparation of article we applied a complex approach of nonlinear dynamics, consisting of the use of the discrete Fourier transform, the reconstruction of the dynamics of the time series with the construction of phase portraits and determining the dimensions of the phase space and attractor, calculation of Lyapunov exponents and Kolmogorov – Sinai entropy.

Results. It is found that Fourier spectrum—discrete; attractor dimension is expressed in non-integer number, and it is more than three; dimension of the phase space is equal to five; values of Lyapunov exponents correspond to: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 < 0$; KS-entropy value is greater than zero ($h = 0,018 \pm 0,002$); characteristic time that can be predicted by changes in the level corresponding to 58 - 60 days.

Conclusion. The analysis conducted by methods of nonlinear dynamics shows deterministic character of Caspian Sea level changes for 1931–2009 and realization of dynamic chaos.

Ключевые слова: Каспийское море, уровень, динамика, анализ временных рядов, аттрактор, фазовое пространство, детерминированный хаос.

Key words: Caspian sea, level, dynamics, time series analysis, attractor, phase space, deterministic chaos.

Одной из особенностей Каспийского моря является колебательное изменение его уровня. Причины этих флуктуаций на настоящее время не установлены, хотя предполагается, что они связаны с колебанием стока рек, деформацией дна, с подземным стоком в море, изменениями климата и т. д. (Малинин, 1994; Найденов, 2004). При интерпретации такого типа данных представляется интересным применение подходов теории самоорганизации, так как они в определенной степени позволяют устанавливать особенности поведения и эволюции системы вне зависимости от природы протекающих в ней процессов.

Становление теории самоорганизации и синергетики связано с развитием трех различных направлений научных исследований: физической кинетики и неравновесной статистической физики, термодинамики открытых систем и математического моделирования процессов различного характера, протекающих в тех или системах (Поллак, Михайлов, 1989; Пригожин, Николис, 2003).

Наряду с этим успешно развивается направление, связанное с определением количественных параметров динамических систем безотносительно их конкретной природы на основе анализа временных последовательностей (Берже и др., 2000; Пригожин, Николис, 2003).



Важным является тот факт, что детерминированная система при определенных условиях может проявлять либо признаки самоорганизации в виде образования пространственных и временных структур, либо особенности хаотического поведения (Берже и др., 2000; Тимашев, 2007). Временную эволюцию последних нелегко отличить от реализации случайного сигнала, но разрабатываемые в нелинейной динамике подходы позволяют отличать случайные процессы от детерминированного хаоса и оценивать их количественные параметры (Берже и др., 2000; Малинецкий, Потапов, 2000; Тимашев, 2007).

В настоящем сообщении предпринята попытка иллюстрировать наличие сложного детерминированного механизма изменения уровня Каспийского моря и определить некоторые параметры этого явления на основе общей теории нелинейной динамики хаотических систем.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

В качестве исходных при написании настоящего сообщения использованы данные по изменению уровня Каспийского моря, зарегистрированные на станции Махачкала за 1931–2009 годы (Монахов, Бутаев, 2011) (рис. 1).

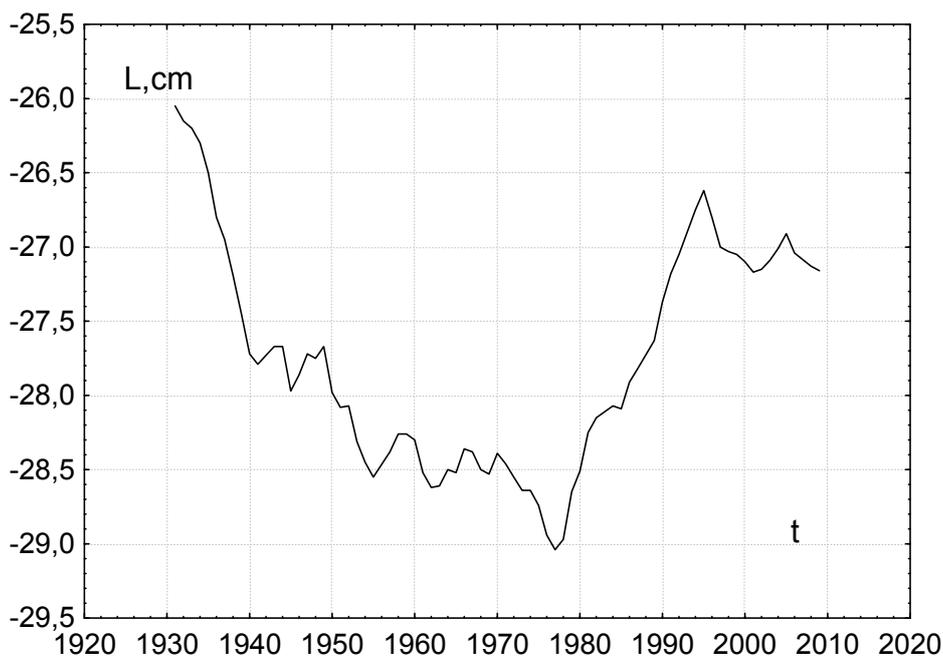


Рис. 1. Результаты по измерению уровня Каспийского моря за 1931–2009 годы.

Данные этого рисунка показывают, что изменение уровня время от времени носит флуктуационный (колебательный) характер. Основной задачей при анализе такого типа данных является в первую очередь определение параметров, которые могут идентифицировать динамику исследуемых процессов (Берже и др., 2000; Тимашев, 2007). С этой целью при написании статьи был применен комплексный подход, основанный на использовании дискретного преобразования Фурье (ДПФ), реконструкции динамики временного ряда с построением фазовых портретов и определением размерностей фазового пространства и аттрактора, вычисления показателей Ляпунова и энтропии Колмогорова – Синяя (Отнес, Энноксон, 1982; Ляпунов, 2000; Магомедбеков и др., 2007; Тимашев, 2007; Magomedbekov et al., 2011).



Необходимо отметить, что указанные методы позволяют описывать динамику процессов, протекающих в стационарном режиме.

1. Анализ Фурье – преобразования временного ряда. Обработку кривых по временным последовательностям проводили, используя численные методы, сводящиеся к построению спектра Фурье и указанию характерных пиков в этом спектре, закономерности их взаимного расположения и уровня (Задирака, 1983). Вычисления проводили на основе численного метода – дискретного преобразования Фурье с использованием стандартной программы расчета ДПФ (Эберт, Эдерер, 1988).

Полученные результаты по Фурье-анализу временного ряда показывают (рис. 2), что частоты не удается выделить и, следовательно, реализуются хаотические колебания.

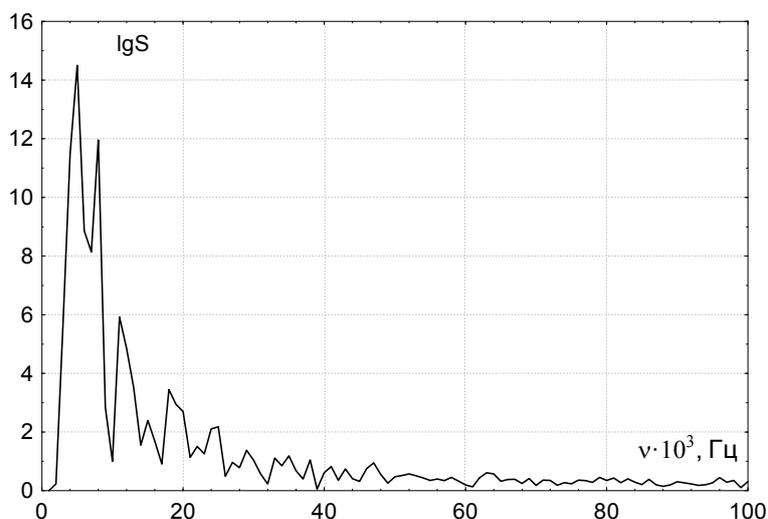


Рис. 2. Фурье-спектр временного ряда

Эти данные позволяют сделать предварительное заключение о том, что наблюдаемые флуктуации уровня являются следствием протекания сложных процессов в описываемой системе, что, в свою очередь, указывает на детерминированный характер наблюдаемых колебательных явлений.

2. Реконструкция динамики по временной последовательности данных. Одними из основных характеристик для описания динамики процессов любой природы, при протекании которых наблюдаются осцилляции измеряемого физического параметра, являются величины размерностей фазового пространства (n) и аттрактора (d). Фазовое пространство автономной системы n -го порядка – это n -пространство переменных, которые отображают совокупность всех возможных состояний системы. Размерность фазового пространства (n) соответствует количеству минимальных переменных, которые необходимы для описания динамики определенного процесса (Полак, Михайлов, 1989; Берже и др., 2000; Пригожин, Николис, 2003).

Аттрактором является некоторое инвариантное подмножество фазового пространства, к которому сходятся семейства фазовых траекторий (траектория системы в фазовом пространстве после окончания промежуточных процессов) (Берже и др., 2000; Пригожин, Николис, 2003). По размерности аттрактора (d) можно сделать заключение о типе колебаний: при $d = 1$ реализуются незатухающие периодические колебания, если $d = 2$, то налицо квазипериодические колебания с двумя несоизмеримыми частотами, а в случае $d > 2$ и не целое, то можно ожидать реализацию в системе хаотических колебаний. Детерминированный хаос проявляется, как правило, если $d > 3$. Следует подчеркнуть, что



значение размерности фазового пространства всегда больше величины размерности аттрактора ($n > d$) (Пригожин, Николис, 2003).

2.1. Построение фазовых портретов. Обычно при построении фазовых портретов исследуемой системы используют изменяющиеся по времени значения определенного физического параметра, характеризующего поведение системы. Поэтому возникает проблема идентификации зависимости одной переменной от времени, т. е. получения ответа на вопрос, каковы параметры системы, породившей данный временной ряд. При этом прежде всего необходимо получить информацию о размерностях фазового пространства и аттрактора (Берже и др., 2000; Пригожин, Николис, 2003).

Задача восстановления временного ряда по одной переменной, в которой наблюдаются стационарные колебания, была решена Такенсом (Takens, 1985), а в работе Паккарда и др. (Packard et al., 1980) показано, что можно получить удовлетворительную геометрическую характеристику аттрактора, если вместо переменных, входящих в уравнения динамической системы, использовать n -мерные векторы, получаемые из элементов того же временного ряда.

Анализ данных по временной зависимости изменения уровня Каспийского моря проведен на основе метода оценки размерности аттрактора с восстановлением фазового пространства с использованием алгоритма, предложенного Грассбергером и Прокаччо (Grasberger, Procaccia, 1983), который базируется на подходах, разработанных в указанных выше работах.

В соответствии с этим, исходя из одной зависящей от времени переменной, можно восстановить траекторию в n -мерном фазовом пространстве, выбирая в качестве координат величины $X(t)$, $X(t + \tau)$, $X(t + 2\tau)$, ..., $X(t + (n - 1)\tau)$, где τ – временная задержка; $X(t)$, $X(t + \tau)$, ... – величины, характеризующие состояние системы в момент времени t , $t + \tau$.

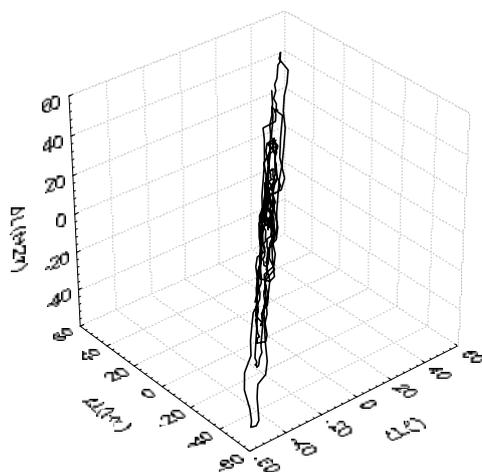


Рис. 3. Фазовый портрет процесса изменения уровня Каспийского моря в координатах $\Delta L(t) - \Delta L(t + \tau) - \Delta L(t + 2\tau)$

Время t дискретизируется, и в результате получается серия n -мерных векторов, представляющих фазовый портрет динамической системы. Существенным в этом подходе является то, что имеющаяся у исследователя информация достаточна для развертывания динамики системы в многомерном фазовом пространстве и способна отобразить фазовый портрет (Grasberger, Procaccia, 1983; Magomedbekov et al., 2011).



Для построения фазового портрета в качестве координат в работе использованы величины $\Delta L(t + 2\tau)$, $\Delta L(t + \tau)$ и $\Delta L(t)$, где $\Delta L(t)$, $\Delta L(t + \tau)$ и $\Delta L(t + 2\tau)$ – величина изменения уровня в момент времени t , $t + \tau$ и $t + 2\tau$ соответственно.

На рисунке 2 представлен трехмерный фазовый портрет системы исследуемого процесса, полученный на основе временного ряда при $\tau = 60$ дней.

Как показывает данные этого рисунка, семейства фазовых траекторий стягиваются к некоторому определенному подмножеству точек фазового пространства – аттрактору. Этот факт указывает на сложный характер протекания процессов, связанных с изменением уровня, и подтверждает детерминированность его динамики (Пригожин, Николлис, 2003). Для определения размерностей фазового пространства и аттрактора было проведено исследование динамики на основе принципов реконструкции временных последовательностей данных.

2.2. Восстановление аттрактора по временным рядам. Анализ динамических особенностей изучаемого процесса проводили на основе теоретических предпосылок, приведенных в работах предыдущих исследователей (Packard et al., 1980; Grasberger, Procaccia, 1983; Takens, 1985), согласно которым если все точки лежат на аттракторе, то существует пространственная корреляция, которую можно охарактеризовать с помощью функции:

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^N \theta(r - |\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|), \quad (1)$$

где θ – функция Хевисайда ($\theta = 1$ при $X > 0$, $\theta = 0$ при $X \leq 0$); \mathbf{X}_i – точка фазового пространства (векторное обозначение) с координатами $\{X_0(t_i), \dots, X_0(t_i + (n - 1)\tau)\}$ – начало отсчета для вычисления расстояния до остальных $n - 1$ точек в виде $|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|$; это позволяет сосчитать число точек в фазовом пространстве, отстоящих от \mathbf{X}_i на расстоянии, не превышающем некоторую заданную величину r , а отклонение $C(r)$ от нуля служит мерой влияния точки \mathbf{X}_i на положение других точек (Берже и др., 2000; Пригожин, Николлис, 2003).

Размерность аттрактора d (нижняя граница) при сравнительно малых значениях r определяется по наклону зависимости $\ln C(r)$ от $\ln r$ в определенном диапазоне r :

$$\ln C(r) = d \cdot \ln r \quad (2)$$

На основе этих предпосылок можно определить величины размерностей аттрактора и фазового пространства (Packard et al., 1980; Grasberger, Procaccia, 1983).

Обработку данных проводили при помощи следующего алгоритма:

а) построение корреляционной функции на основании соотношения (1), исходя из рассматриваемого временного ряда, при последовательных возрастающих значениях размерностей фазового пространства;

б) получение наклона d вблизи начала координат в соответствии с выражением (2) и определение, каким образом меняется эта величина при возрастании n ;

в) определение размерностей аттрактора и фазового пространства на основе зависимости $d = f(n)$ (Grasberger, Procaccia, 1983; Берже и др., 2000; Пригожин, Николлис, 2003; Magomedbekov et al., 2011).

Используя данный подход, исходя из данных временного ряда (рис. 1), построены корреляционные функции при последовательно возрастающих значениях фазового пространства $n = 2 \div 8$. Полученные зависимости приведены на рисунке 4, а зависимость размерности аттрактора от размерности фазового пространства – на рисунке 5.

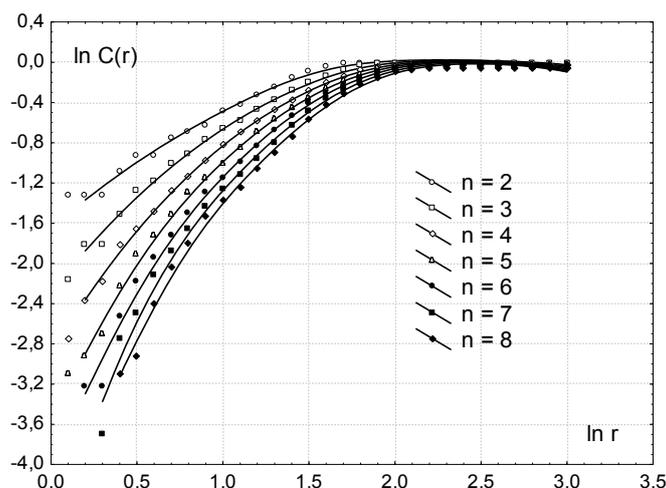


Рис. 4. Зависимости $\ln C(r)$ от $\ln r$ при различных значениях размерностей фазового пространства для процесса изменения уровня Каспийского моря

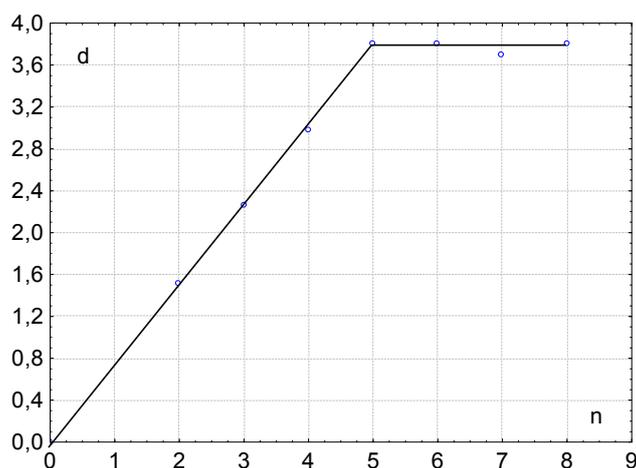


Рис. 5. Зависимость размерности аттрактора d от размерности фазового пространства n процесса изменения уровня Каспийского моря

Полученные результаты свидетельствуют о том, что величина размерности аттрактора не зависит от размерности фазового пространства при значениях $n \geq 5$, причем значение размерности аттрактора соответствует $d = 3,8$.

Следует заметить, что если значение d равно n (или продолжает расти вместе с n), то такое явление наблюдается для «белого» шума. Вместе с этим если размерность d , вычисленная для хаотического режима, становится не зависящей от n , то хаос детерминированный, а соответствующий аттрактор – странный, так как неустойчивость траекторий в фазовом пространстве является характерным признаком реализации динамического хаоса (Grasberger, Procaccia, 1983; Пригожин, Николис, 2003; Magomedbekov et al., 2011).

На детерминированный хаос указывает и то обстоятельство, что размерность аттрактора больше трех и принимает дробное значение (Magomedbekov et al., 2011).

Наряду с этим представленный анализ данных по изменению уровня Каспийского моря позволяет определить число независимых переменных (в нашем случае равный пяти), необходимых для моделирования поведения, соответствующего данному аттрактору.



3. Вычисление характеристических показателей Ляпунова и энтропии Колмогорова – Синяя. Как было отмечено, в поведении систем с регулярным движением и хаотической динамикой существует принципиальная разница, заключающаяся в отличии типа аттракторов: реализации регулярного движения соответствуют простые аттракторы, а для детерминированного хаоса аттрактор будет странным (Малинецкий, Потапов, 2000; Пригожин, Николис, 2003). Поэтому в качестве критерия хаотичности выбирается средняя мера экспоненциального расхождения фазовых траекторий, которая оценивается по значениям показателей Ляпунова λ_i (Ляпунов, 2000). При этом динамический хаос реализуется только в диссипативных системах и характеризуется наличием в спектре положительных показателей Ляпунова.

Другой характеристикой динамики протекающих процессов является энтропия Колмогорова – Синяя (КС-энтропия, h) (Корнфельд и др., 1980), при помощи которой можно определить, каким является исследуемый режим поведения системы. Точное значение этой величины определяется в виде:

$$h = \lim_{\substack{d(0) \rightarrow 0 \\ l \rightarrow \infty}} t^{-1} \ln[\rho(t) / \rho(0)],$$

где $\rho(0)$ и $\rho(t)$ – расстояние между точками $x_1(0)$ и $x_2(0)$ фазового пространства в начальный момент времени и момент времени t ($t > 0$) соответственно.

Если динамика является периодической или квазипериодической, значение $h = 0$, а когда движению отвечает устойчивая стационарная точка, то $h < 0$. Однако в случае реализации детерминированного хаоса $h > 0$ и КС-энтропия принимает конечное положительное значение. Величина, обратная КС-энтропии ($t = h^{-1}$), соответствует характерному времени, на которое может быть предсказано поведение системы.

При выполнении работы были вычислены показатели Ляпунова и КС-энтропии для наблюдаемого ряда. Результаты расчетов, проведенных на основе некоммерческой программы TISEAN 2.1 (Rainer et al., 2000), в виде зависимости показателей Ляпунова от длины временного ряда представлены на рисунке 6.

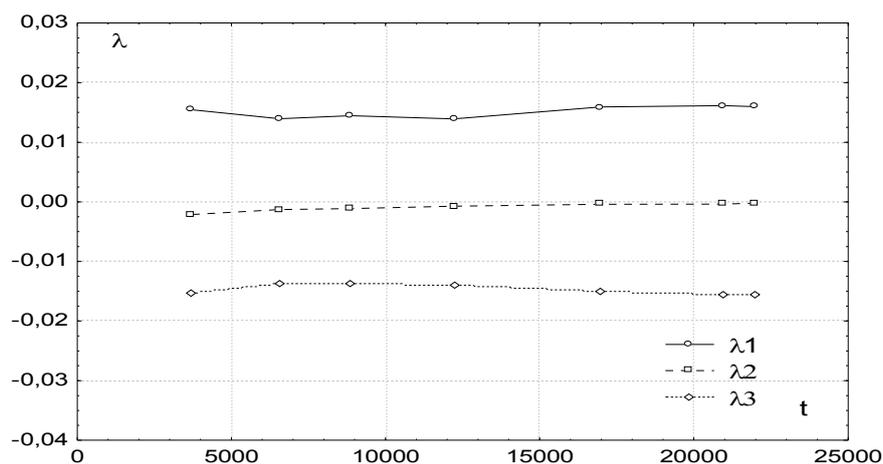


Рис. 6. Зависимость показателей Ляпунова от длины временного ряда.

Данные рисунка 6 свидетельствуют о том, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 < 0$, что указывает на реализацию детерминированного хаоса при протекании процессов, обуславливающих изменение уровня Каспийского моря.



Величина КС-энтропии равна $h = \lambda_1 = (0,018 \pm 0,002)$. Отсюда вытекает, что характерное время, на которое может быть предсказано изменение уровня Каспийского моря ($t = h^{-1}$), соответствует 58–60 дням.

Таким образом, анализ результатов, полученных на основе обработки данных по изменению уровня Каспийского моря за 1931–2009 годы методами нелинейной динамики, позволяет сделать следующие заключения:

1. Наблюдаемые флуктуации уровня Каспийского моря указывают на детерминированный характер колебательных явлений; следует отметить, что если бы эти колебания носили случайный характер, то спектр Фурье был бы сплошным.

2. Тот факт, что размерность аттрактора выражается не целым числом и она больше трех ($d = 3,8$), служит естественным ключом к пониманию внутренней изменчивости и непредсказуемости изменения уровня Каспийского моря, поскольку обе эти особенности относятся к основным свойствам хаотической динамики.

3. Проявление динамического хаоса подтверждается результатами вычисления спектра показателей Ляпунова ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 < 0$), так как динамический хаос реализуется только в диссипативных системах, и он характеризуется наличием в спектре положительных показателей Ляпунова.

4. Величина КС-энтропии больше нуля ($h = 0,018 \pm 0,002$), что также свидетельствует о реализации детерминированного хаоса при протекании процессов, связанных с изменением уровня рассматриваемого водоема; характерное время, на которое может быть предсказано изменение уровня, соответствует 58–60 дням.

5. Размерность фазового пространства соответствует пяти. Поэтому при математическом моделировании характера изменения уровня Каспийского моря необходимо учитывать как минимум число независимых переменных, равное пяти.

Представленный материал отражает и тот факт, что описание динамики путем обработки временных рядов указанными методами приводит к схожим результатам, что, в свою очередь, подтверждает правомочность подходов, используемых при выполнении настоящей работы, что наблюдалось нами и ранее при обсуждении поведения гомогенных колебательных химических реакций (Магомедбеков и др., 2007; Magomedbekov et al., 2011).

В заключение отметим, что данный подход плодотворен при рассмотрении процессов эволюции, протекающих в стационарном режиме. Поэтому в следующем сообщении будут обсуждены вопросы, связанные с приданием информационной значимости последовательностям нерегулярностей динамических переменных исследуемой системы, основанных на методологии фликкер-шумовой спектроскопии (Тимашев, 2007).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Берже П., Помо К., Видаль К. 2000. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Меркурий-ПРЕСС. 366 с.
- Задирака В.К. 1983. Теория вычислительного преобразования Фурье. Киев: Наукова думка. 273 с.
- Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. 1980. Эргодическая теория. М.: Наука. 383 с.
- Ляпунов А.М. 2000. Общая задача об устойчивости движения. Черновцы: Меркурий-ПРЕСС. 386 с.
- Магомедбеков У.Г., Гасанова Х.М., Гасангаджиева У.Г., Абдулхамидов К.А., Муцалова С.Ш. 2007. Химические неустойчивости при окислении 1,4-нафтодиола в гомогенной среде. I. Детерминированный характер процесса окисления 1,4-нафтодиола и его количественные параметры. *Вестник Московского университета. Серия 2: Химия*. 48(3): 212–216.
- Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. 2000. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Editorial URSS. 336 с.
- Малинин В.Н. 1994. Проблема прогноза уровня Каспийского моря. СПб.: Изд-во РГГМИ. 164 с.
- Монахов С.К., Бутаев А.М. 2011. Уровень Каспийского моря за 1931–2009 г.г. URL: <http://caspiy.net/statii/48-uroven-kaspijskogo-morya-za-1931-2009-gg.html>.
- Найденков В.И. 2004. Нелинейная динамика поверхностных вод суши. М.: Наука. 318 с.
- Отнес Р., Эноксон Л. 1982. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы. М.: Мир. 428 с.
- Полак А.С., Михайлов А.С. 1989. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. М.: Наука. 286 с.
- Пригожин И., Николис Г. 2003. Познание сложного. Введение. М.: Изд-во ЛКИ. 344 с.
- Тимашев С.Ф. 2007. Фликкер-шумовая спектроскопия: информация в хаотических сигналах. М.: Физматлит. 248 с.



- Эберт К., Эдерер Х. 1988. Компьютеры. Применение в химии. М.: Мир. 415 с.
- Grasberger P., Procaccia I. 1983. Measuring the strangeness of strange attractor. *Physica D*. 9(1): 189–208.
- Magomedbekov U.G., Gasangadzhieva U.G., Gasanova Kh.M., Magomedbekov N.Kh. 2011. Nonlinear (fluctuational) dynamics and mathematical modeling of homogenous oxidation of biological substrates. *Russian Journal of General Chemistry*. 81(1): 247–257.
- Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S. 1980. Geometry from a time series. *Physical Review Letters*. 45: 712–715.
- Rainer H., Holger K., Thomas S. 2000. TISEAN 2.1 (December 2000) Nonlinear Time Series Analysis. Available at: http://www.mpijks-dresden.mpg.de/~tisean/TISEAN_2.1.
- Takens F. 1985. On the numerical determination of dimensions of an attractor. *In: Lecture Notes in Math*. Vol. 1025. Berlin: Springer: 99–106.

REFERENCES

- Berger P., Pomo K, Vidal K. 2000. Poryadok v khaose. O deterministskom podkhode k turbulentnosti [The order in chaos. On deterministic approach to turbulence]. Moscow: Mercury-PRESS. 366 p. (in Russian).
- Ebert K., Ederer H. 1988. Komp'yutery. Primenenie v khimii [The computers. The applications in chemistry]. Moscow: Mir. 415 p. (in Russian).
- Grasberger P., Procaccia I. 1983. Measuring the strangeness of strange attractor. *Physica D*. 9(1): 189–208.
- Kornfeld I.P., Sinai A.G., Fomin S.V. 1980. Ergodicheskaya teoriya [Ergodic theory]. Moscow: Nauka. 383 p. (in Russian).
- Lyapunov A.M. 2000. Obshchaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya [General problem of stability of motion]. Chernivtsy: Mercury-PRESS. 386 p. (in Russian).
- Magomedbekov U.G., Gasangadzhieva U.G., Gasanova Kh.M., Magomedbekov N.Kh. 2011. Nonlinear (fluctuational) dynamics and mathematical modeling of homogenous oxidation of biological substrates. *Russian Journal of General Chemistry*. 81(1): 247–257.
- Magomedbekov U.G., Gasanova Kh.M. Gasangadzhieva U.G., Abdulhamidov K.A., Mutsalova S.Sh. 2007. Chemical instabilities on the 1,4-naphthodiol oxidation in homogeneous medium. I. Determinate character of oxidation processes and its quantitative parameters. *Moscow University Chemistry Bulletin*. 62(3): 172–176.
- Malineskii G.G., Potapov A.B. 2000. Sovremennyye problemy nelineynoy dinamiki [Modern problems of nonlinear dynamics]. Moscow: Editorial URSS. 336 p. (in Russian).
- Malinin V.N. 1994. Problema prognoza urovnya Kaspiyskogo morya [The problem of forecasting the level of the Caspian Sea]. Saint Petersburg: Russian State Hydrometeorological Institute Publ. 160 p. (in Russian).
- Monakhov A.M., Butaev A.M. 2011. Uroven' Kaspiyskogo morya za 1931–2009 g.g. [The level of the Caspian Sea in 1931–2009]. Available at: <http://caspiy.net/stati/48-uroven-kaspijskogo-morya-za-1931-2009-gg.html> (in Russian).
- Naydenov V.I. 2004. Nelineynaya dinamika poverkhnostnykh vod sushi [Nonlinear dynamics of surface waters]. Moscow: Nauka. 318 p. (in Russian).
- Otnes R., Enochson L. 1982. Prikladnoy analiz vremennykh ryadov. Osnovnye metody [Applied time series analysis]. Moscow: Mir. 428 p. (in Russian).
- Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S. 1980. Geometry from a time series. *Physical Review Letters*. 45: 712–715.
- Polak A.S., Mikhailov A.S. 1989. Samoorganizatsiya v neravnovesnykh fiziko-khimicheskikh sistemakh [Self-organization in nonequilibrium physical-chemical systems]. Moscow: Nauka. 286 p. (in Russian).
- Prigogine I., Nikolis G. 2003. Poznanie slozhnogo. Vvedenie [Exploring complexity. An introduction]. Moscow: LKI. 344 p. (in Russian).
- Rainer H., Holger K., Thomas S. 2000. TISEAN 2.1 (December 2000) Nonlinear Time Series Analysis. Available at: http://www.mpijks-dresden.mpg.de/~tisean/TISEAN_2.1.
- Takens F. 1985. On the numerical determination of dimensions of an attractor. *In: Lecture Notes in Math*. Vol. 1025. Berlin: Springer: 99–106.
- Timashev S.F. 2007. Flikker-shumovaya spektroskopiya: informatsiya v khaoticheskikh signalakh [Flicker-noise spectroscopy: the information in chaotic signals]. Moscow: Fizmatlit. 248 p. (in Russian).
- Zadiraka V.K. 1983. Teoriya vychislitel'nogo preobrazovaniya Fur'e [Theory of computing the Fourier transform]. Kiev: Naukova dumka. 273 p. (in Russian).